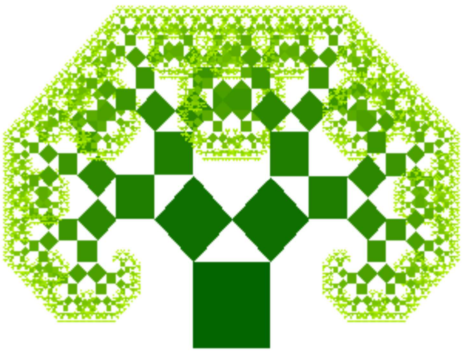


Reader wiskunde en cultuur 2-3

Willem van Ravenstein

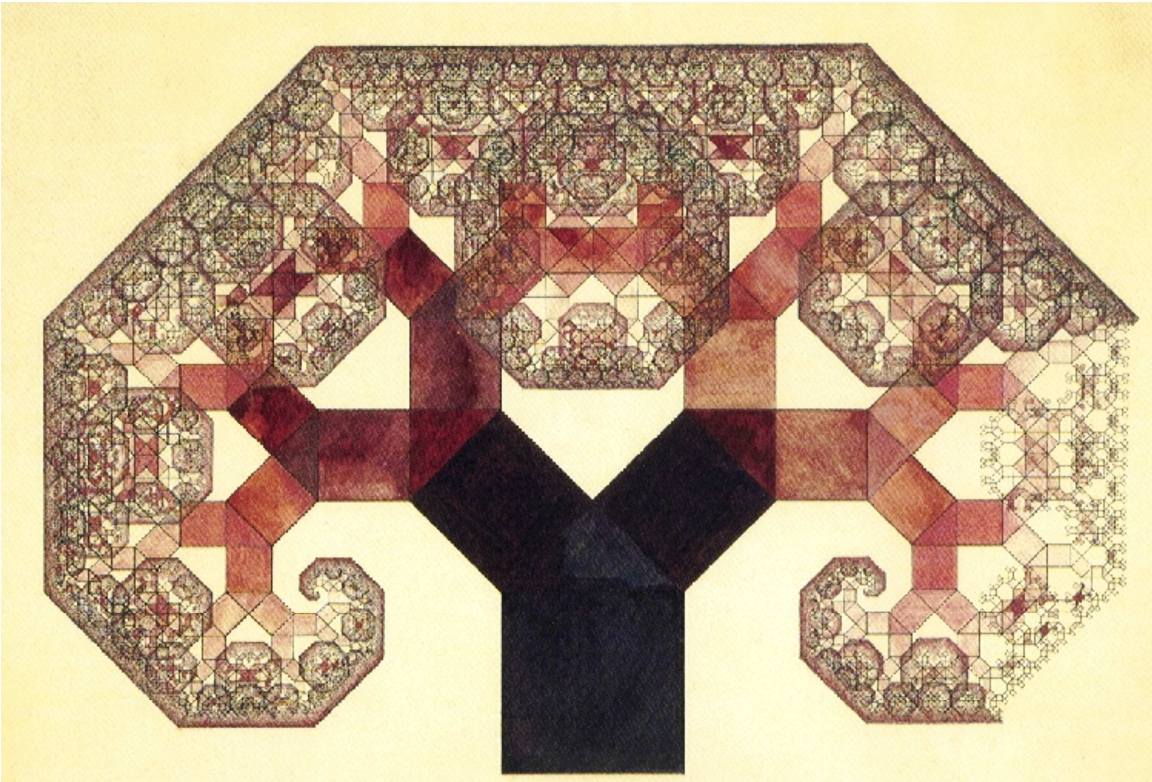
bijgewerkt april 2009

Inhoudsopgave

Introductie wiskunde & kunst

Inleiding bij ‘Wiskunde en cultuur 2-3’.

Hieronder zie je een afbeelding van de ‘Boom van Pythagoras’.



Albert Bosman (1942)

In de tekst op de website van Ars et Mathesis staat:

“Het probleem dat hij zich stelde was: wat voor een figuur ontstaat er, als je op de bovenste zijde van een vierkant een gelijkbenige rechthoekige driehoek tekent en op de rechthoekszijden daarvan weer twee vierkanten, vervolgens weer driehoeken, enzovoort. Het begon te lijken op een groeiende boom. Na de vierde herhaling gebeurde iets onverwachts: de boom begon ook naar binnen te groeien. Hij had al berekend, dat de hele boom nooit hoger dan vier maal de hoogte van het oorspronkelijke vierkant kon worden en de breedte zes maal de zijde van het vierkant dat het eerst werd getekend. Iets wat iedereen met enige wiskundige kennis over reeksen gemakkelijk kan controleren.”

Dat wil ik dan wel ’s zien.

Opdracht

- Laat zien dat de hele boom nooit hoger wordt dan 4 maal de hoogte van het oorspronkelijk vierkant.
- Laat zien de hele boom nooit breder wordt dan 6 maal de zijde van het oorspronkelijke vierkant.

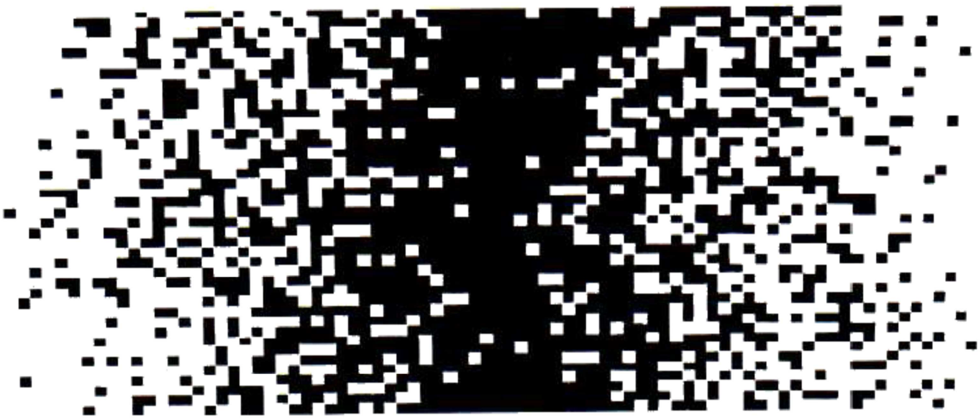
Wiskunde met Verve | bloemlezing | deel 1

Aangepast door W.v.Ravenstein | IVL hogeschool Rotterdam | 2009

Inleiding

Sommige beeldende kunstenaars passen in hun werk wiskunde toe. Soms heeft men achteraf in schilderijen en tekeningen meetkundige patronen ontdekt, maar als je de kunstenaar vroeg waren die er niet door hem bewust ingelegd. Andere kunstenaars gebruiken wel heel bewust de wiskunde voor het maken van hun werk. Vooral over het werk van deze laatste groep gaat deze bloemlezing van **Wiskunde met Verve**.

Een kwestie van willekeur



Ellsworth Kelly, Seine (1951)

Een rivier? De titel wijst daar wel op. Maar hoe zou hij dat gemaakt hebben? Is het een computerbewerking van schittering op het water? Of is er iets anders aan de hand?
Kijk maar ’s naar de kolommen. Het is duidelijk dat het vierkantjes zijn in een rechthoek.

Opdracht 1

Wat zijn de afmetingen van die rechthoek?
Is er een ‘mooie verhouding’ tussen lengte en hoogte?
Zit er een ‘bepaalde structuur’ in de plaats van de vierkantjes?
Hoe zou het gemaakt zijn?

Opdracht 2

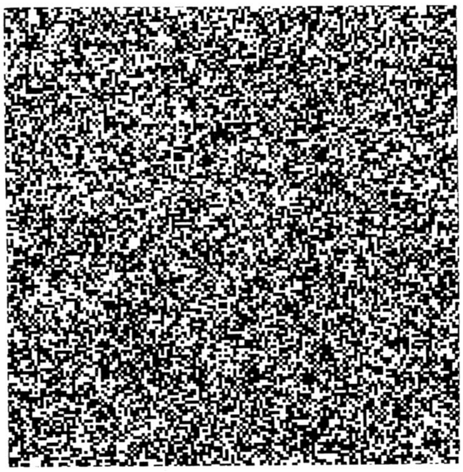
Teken een ‘schaakbord’ van 5 bij 5 en kleur de vlakjes willekeurig zwart of wit. Gebruik daarvoor een munt of je grafische rekenmachine.

Opdracht 3

Ontwerp voor zo’n ‘schaakbord’ van 5 bij 5 eens een **mooi patroon** met zwarte en witte vakjes.

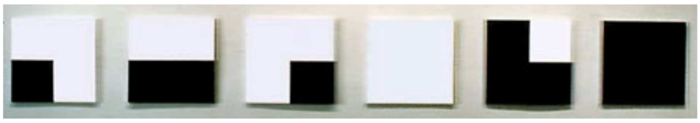
Een schilderij maken door met munten te gooien? Misschien zeg je dat daar geen kunst aan is. Toch hing in 1977 in Berlijn op een tentoonstelling een kunstwerk van de Franse schilder François Morellet dat bestaat uit 40.000 van zulke zwart-wit vierkantjes. François Morellet gooide weliswaar niet met een munt, maar gebruikte even of oneven zijn van opeenvolgende telefoonnummers in een telefoonboek.

Hieronder zie je bovengenoemd werk en andere voorbeelden:



François Morellet, Répartition aléatoire de 40 000 carrés, 50 % noir, 50 % blanc, 1961

François Morellet , Répartition aléatoire de triangles suivant les chiffres pairs et impairs d'un annuaire de téléphone, 1958.

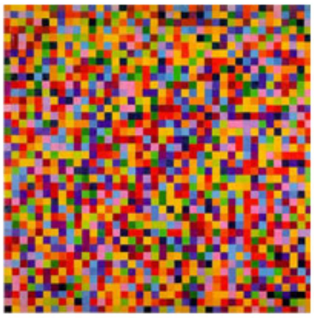


François Morellet, 6 répartitions aléatoires, 1958

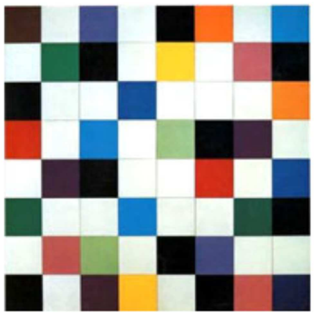
Andere voorbeelden

Ellsworth Kelly

Spectrum Colors
Arranged by Chance VI, 1951



Spectrum Colors
Arranged by Chance VII, 1951



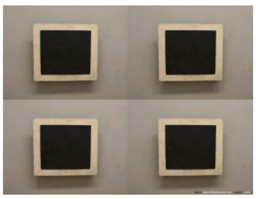
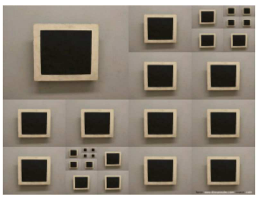
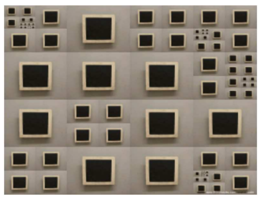
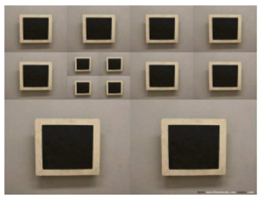
Sixty-Four Panels:
Colors for a Large Wall, 1951

Opdracht 4

Ontwerp nu zelf op een dambord van 10 bij 10 een **mooi patroon** met 3 kleuren.

Opdracht 5

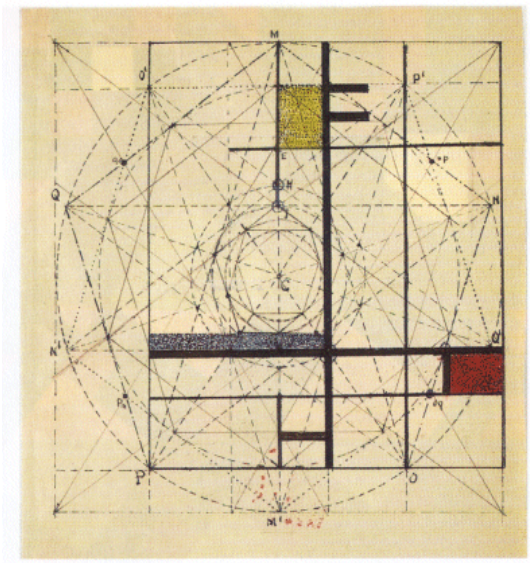
Hieronder zie je een hele andere ‘vorm’ van willekeurigheid of juist niet?

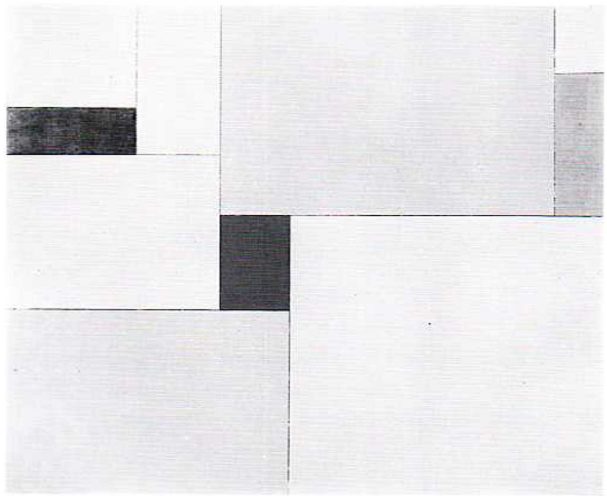
Wat zou hier aan de hand zijn? Wat zou het zijn? Is het kunst? Wat is het?

Jean Corin en Georges Vantongerloo

Achter sommige werkstukken van kunstenaars gaat wiskunde schuil. Dat kan op heel veel verschillende manieren. Wanneer Jean Corin zijn werk ‘Etude d’une composition émanante du protagone inscrit et circonscrit d’un cercle’ noemt, is het wel duidelijk. Vooral als je op het schilderij vijfhoeken en cirkels kunt zien.



Jean Corin, Etude d’une composition émanante du protagone inscrit et circonscrit d’un circle (1951)



Georges Vantongerloo

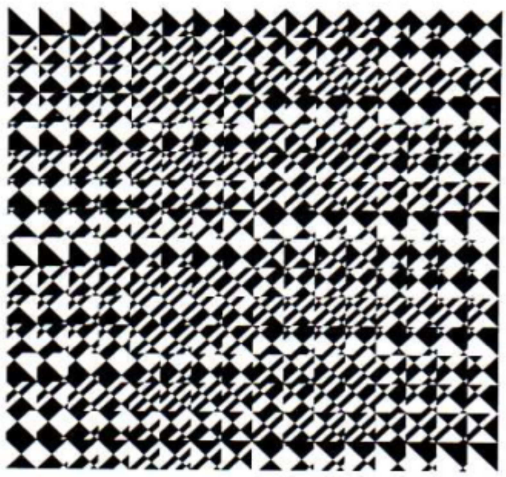
Groupe $y = -ax^2 + bx + c$ $y' = -2ax + b$

$y = \dfrac{-ax^2 + bx + c}{-2ax + b}$ rouge, jaune, vert (1931)

Georges Vantongerloo gebruik in de titel van zijn schilderij zelfs een functievoorschrift en de afgeleide. Veel mensen hebben zich afgevraagd wat die formules met het werk te maken hebben.

Albert Roskam

Er zijn ook kunstenaars die een iets andere weg bewandelen. Kijk bijvoorbeeld eens naar het afgebeelde werk van Albert Roskam hiernaast.



Albert Roskam, T 71-11 (1971)

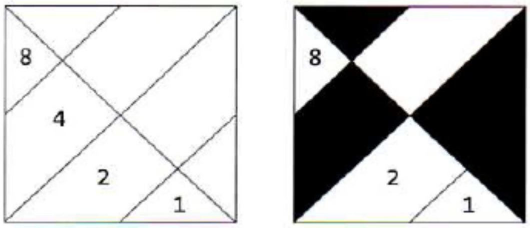
Op het eerste gezicht zijn het geen vierkantjes maar als je goed kijkt zie dat er een structuur van 256 vierkantjes te zien is. Ieder vierkantje in op een bepaalde manier voor een deel gevuld met zwart.

Opdracht 6

Teken een vierkant opgebouwd uit 16 kleine vierkantjes. Geef elk van die 16 vierkantjes een nummer:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Elk van de 16 vierkantjes bestaat uit 4 stroken, waarin je de getallen 1, 2, 4 en 8 kunt zetten zoals in de figuur hieronder:



Van iedere van die 4 stroken wordt of de helft linksonder of de helft rechtsboven zwart gemaakt. Als je de cijfers die je nog ziet staan optelt krijg je een getal tussen 0 en 15. In het voorbeeld is dat 1+2+8=11. Teken dan dit figuurtje op plaats 11 in je vierkant van 4 bij 4.

- Beredeneer dat er precies 16 verschillende figuurtjes mogelijk zijn die de getallen 0 tot en met 15 precies één keer voorstellen.
- Maak nu het 4 bij 4 vierkant verder af, door de getallen 0 t/m 15 te vervangen door de zwart-wit figuurtjes zoals in het voorbeeld.

De 4 bij 4 figuur die je nu gemaakt hebt is een kleine uitgave van het werk van Roskam.

Het tweetallig of binaire stelsel

De 'oude' Egyptenaren wisten al dat je alle natuurlijke getallen kunt schrijven als de som van machten van 2. Zo kan je de 11 uit het voorbeeld hierboven schrijven als 1+2+8. In het tweetallig stelsel schrijf je 11 als 1011. Om aan te geven dat het hier om een binaire getal gaat schrijf je daar dan een b-tje bij. Dus $11=1011_b$.

Tellen is het binaire stelsel gaat zo:
0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1111, …

Opdracht 7

Het Freudenthal Instituut stuurde ooit de volgende nieuwjaarswens:

De medewerkers van het Freudenthal Instituut wensen u een voorspoedig

- In welk jaar stuurde het FI deze nieuwjaarswens?
- Hoe zou de nieuwjaarswens voor het jaar 2000 er uit moeten zien?

Opdracht 8

- Schrijf het getal 86 eens in het tweetallig stelsel.
- Maak het patroon dat volgens jou bij Roskam op plaats 86 zal staan. Nu moeten natuurlijk meer machten van 2 dan allen 1, 2, 4 en 8 in het kleine vierkant passen, dus je hebt meer stroken nodig.

Wiskunde met Verve | bloemlezing | deel 2

Aangepast door W.v.Ravenstein | IVL hogeschool Rotterdam | 2009

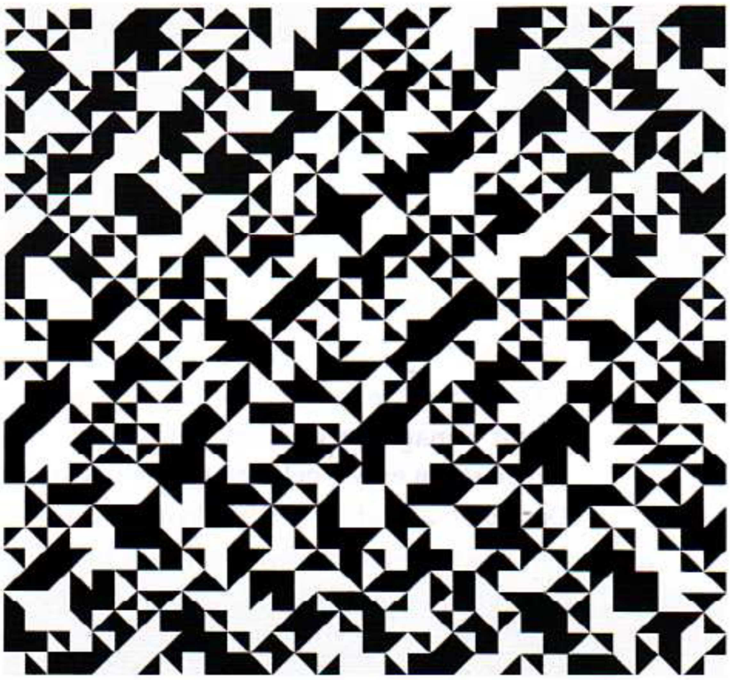
Inleiding

Hiernaast zie je een afbeelding van een kunstwerk van Gerard Traarbach met als titel 'Binary Magic Square 1'.

Het bestaat uit een vierkant van 16 bij 16 vakjes. Elk van de 256 vakjes stelt een getal voor. Het getal bepaalt (net als bij Roskom in deel 1) de kleuring van het vierkantje.

Elk vierkantje wordt door de symmetrieassen van een vierkant verdeeld in 8 driehoekjes die als waarde de getallen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 en 128 krijgen.

De getallen zijn gerangschikt volgens een 16 bij 16 magisch vierkant.



Gerard Traarbach, Binary Magic Square 1 (1986)

Opdracht 1

De zestien getallen in de bovenste rij zijn: 73, 180, 19, 238, 88, 181, 2, 239, 89, 164, 3, 254, 72, 165, 18 en 255. Onder 73 staat 119 en helemaal rechts onderaan staat 20.

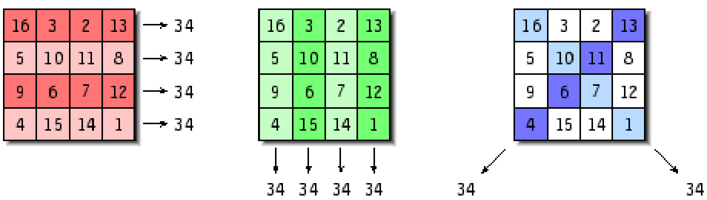
bovenste rij

=119 =20

- Zoek uit hoe Gerard Traarbach de waarde van de acht driehoekjes toekende.

Tovervierkanten

Een magisch vierkant of tovervierkant is een ordening van getallen in een vierkant, zo dat de som van de getallen voor elke rij, elke kolom en elke diagonaal gelijk is. Standaard worden hiervoor de getallen 1, 2, 3, . . . , n^2 genomen. Dit wordt wel een standaard of een normaal of een zuiver tovervierkant genoemd.



Het aantal rijen/kolommen (standaard gelijk aan n) wordt de **orde** van het magisch vierkant genoemd.

De som van een rij (kolom of diagonaal) wordt wel de **magische constante**, het **karakteristiek getal** of het **tovergetal** genoemd en is (in het standaard geval) gelijk aan $\frac{1}{2}n(n^2+1)$.

Opdracht 2

- Bereken de magische constante van een standaard tovervierkant van 16 bij 16 zoals Gerard Traarbach dat gebruikt.
- Leidt de formule voor de magische constante af.

Lo Shu en Ho Thu

Tovervierkanten worden ook wel magische vierkanten genoemd. Het verhaal gaat dat de Chinese keizer Yu (2000 jaar voor Christus) de ontdekker is van de magische vierkanten. Tijdens zijn regeerperiode kreeg Yu op een dag twee diagrammen aangeboden van twee wonderlijke dieren. Deze dieren zouden een grote magische kracht bezitten...

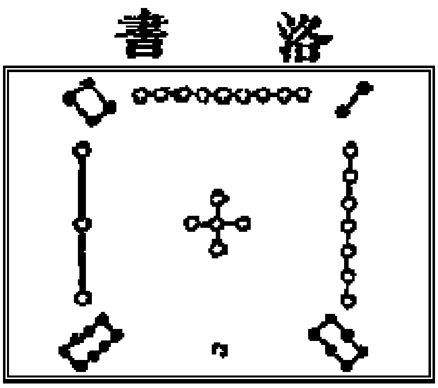


fig.1

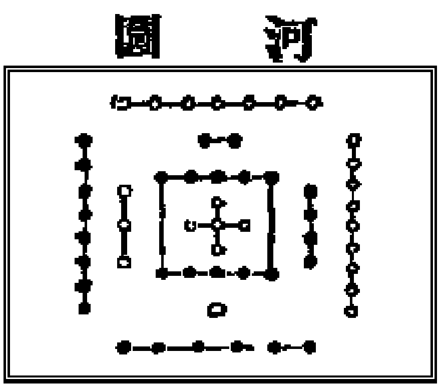
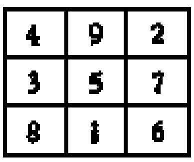
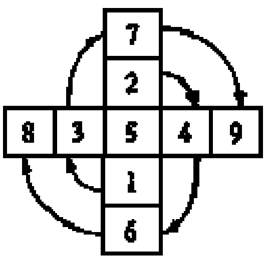


fig.2

In fig.1 zie je Lo Shu, het geschenk van een schildpad uit de rivier Lo en in fig.2 zie je Ho Thu, het geschenk van een drakenpaard uit de Huang He (Gele rivier). Deze dieren gaven de tekeningen niet aan de keizer, maar de keizer vond ze op deze dieren, zo vond de keizer de Lo Shu op de rug van een schildpad.





Deze diagrammen werden als magisch gezien omdat de som (opgeteld dus!) van de getallen in elke rij en elke kolom en in de twee hoofddiagonalen hetzelfde is. Bij de Lo Shu kan je dat makkelijk controleren (zie tekening). De Ho Thu zit anders in elkaar: als je de 5 (en de 10) even buiten beschouwing laat, dan zijn de even getallen samen 20 en de oneven getallen samen ook 20 (zie tekening).

Albrecht Dürer

Hieronder zie een gravure van Albrecht Dürer, een Duits kunstschilder, tekenaar, maker van houtsneden en kopergravures, kunsttheoreticus en humanist uit de Renaissance.

Albrecht Dürer, Melencolia I (1514)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Zelfportret (1498)

Rechtsboven in het werk is een magisch vierkant van 4 bij 4 afgebeeld. Je kunt ook het jaartal van de gravure terug vinden in het magische vierkant. Zo'n 4 bij 4 tovervierkant heeft naast de gebruikelijke sommen van rijen, kolommen en diagonalen nog een aantal bijzonder eigenschappen. Als het vierkant verdeeld in vier vakken, is de som van die vier getallen in zo'n vierkantje ook steeds **34**.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Maar ook onderstaande vakjes zijn steeds samen **34**:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Opdracht 3

Vul met behulp van bovengenoemde eigenschappen onderstaande magische vierkanten verder in:

	3		14
8			12
11		6	

		11	13
	1		
16	10	5	

1			
		3	
			2
14			11

Opdracht 4

Misschien denk je dat je dit soort dingen alleen kan doen met de getallen 1 tot en met 16. Niets is minder waar. Onderzoek of bovenstaande eigenschappen blijven gelden als je

- bij alle getallen 2 optelt
- alle getallen met 2 vermenigvuldigt
- van alle getallen het kwadraat neemt

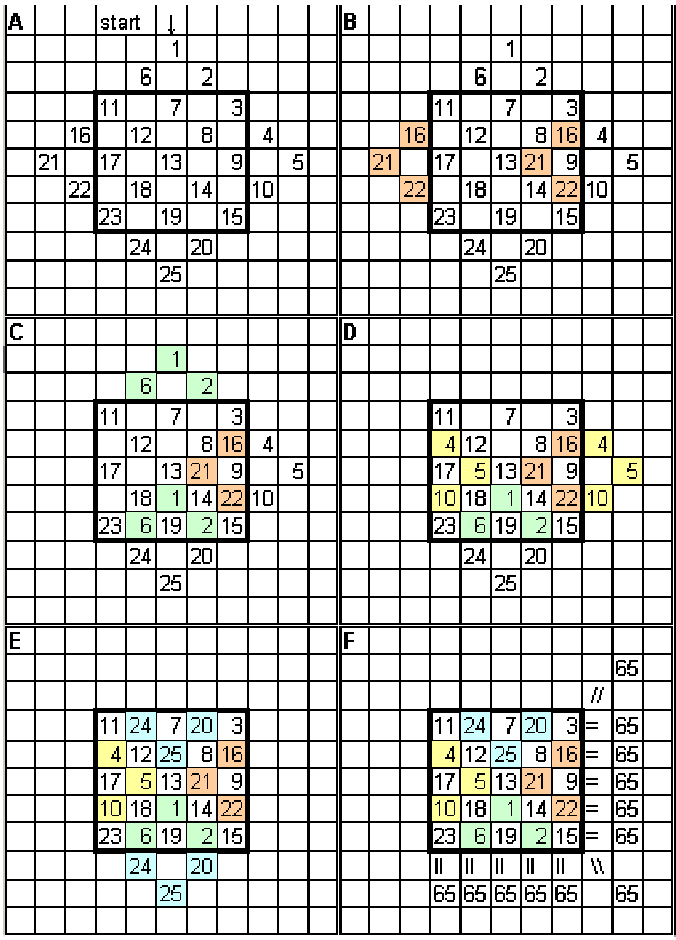
Zelf een tovervierkant maken

Prof. F. van der Blij legt in 'Wiskunde met Verve' uit hoe je zelf een magisch vierkant van 5 bij 5 kunt maken. Hieronder zie je daar een samenvatting van.

Voor oneven, positieve vierkanten:

- Zet de getallen van je magisch vierkant schuin onder elkaar neer(A).
- Teken in het midden de lijnen van je uiteindelijke vierkant (A).
- Verschuif de getallen die buiten je vierkant vallen naar de overkant binnen het vierkant (B, C, D, E).
- Tel de rijen, kolommen en diagonalen op om te zien of het klopt!(F)

Met dank aan



Opdracht 5

- Maak nu zelf een tovervierkant van 7 bij 7 met bovenstaande methode.

Eigenschappen van een 5 bij 5 tovervierkant

Voor het oplossen van gewone magische vierkanten van 5 × 5 is het nuttig te weten dat:

- Het middelste getal M altijd het middelste getal van alle voorkomende getallen is.
- De tegenover elkaar liggende getallen (puntsymmetrisch t.o.v. het middelste getal) samen steeds het dubbele van het middelste getal vormen. De twee groen vakjes (A) zijn samen gelijk aan twee keer het getal in M. De twee oranje vakjes (B) zijn samen gelijk aan twee keer het getal in M. Enzovoort…

		C		
	B			A
		M		
A			B	
		C		

Opdracht 6

Gebruik bovengenoemde eigenschappen om de volgende magische vierkanten op te lossen. Er onder staat wat de som van de rijen en kolommen is.

		26		15
5				3
				10
	7	4		
	16			19

som = 70

	11	9		
14			20	17
	26			
10	7			

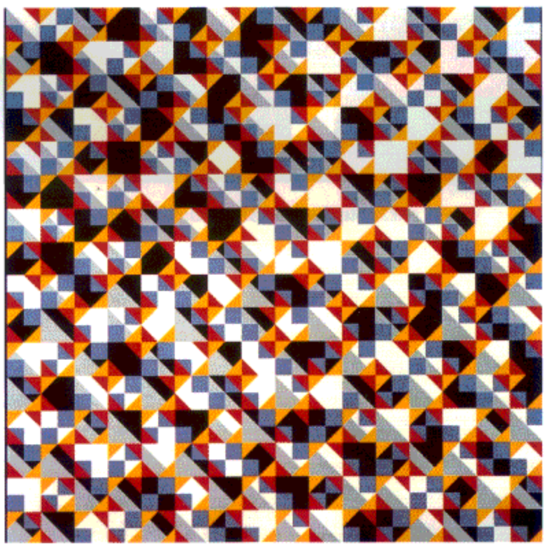
som = 80

Binary Magic Square 92-1 (1991)

Hieronder zie je nog een voorbeeld van een werk van Gerard Traarbach. De werkwijze is hier toch weer anders dan bij het vorige werk.

"Doordat mijn manier van het oplossen van een magische getallenvierkant resulteerde in zulke mooie visuele patronen kwam ik op het idee om groot binair patroon te maken van een 16 bij 16 magisch getallenvierkant om te zien wat dat opleverde. Ik koos ervoor om de 256 vierkantjes tegen elkaar aan te 'plakken'. Elk individueel vierkant verdeelde ik eerst in 4 vierkanten en vervolgens in 8 even grote driehoeken door het diagonaal door te snijden. Dit alles was voordat het computertijdperk voor mij begon. Nadat ik verschillende vierkanten had berekend tekende ik alles met de hand uit op ruitjespapier met liniaal en potlood en dat kostte veel tijd. Uit de resultaten van mijn ontworpen 16 bij 16 vierkanten koos ik vervolgens een naar mijn mening mooi ontwerp om deze te vertalen naar een schilderij."

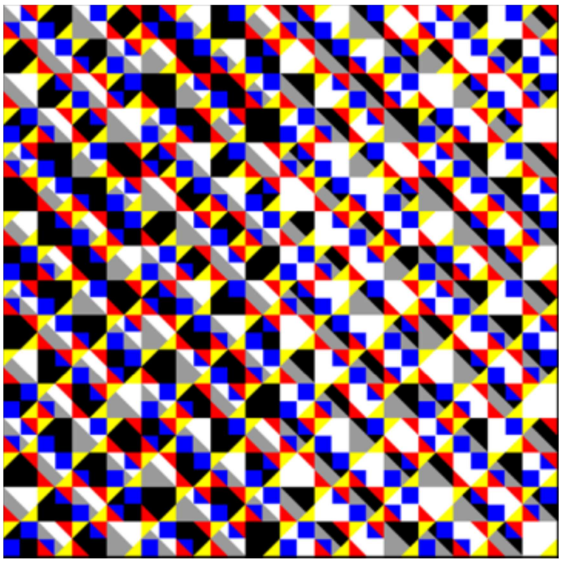
Gerard Traarbach



Binary Magic Square 91-2 (1991)

Tenslotte

Hier zie je een recent computerwerk (met tovervierkant) van dezelfde kunstenaar:



Gerard Traarbach, Binary Magic Square (2008)

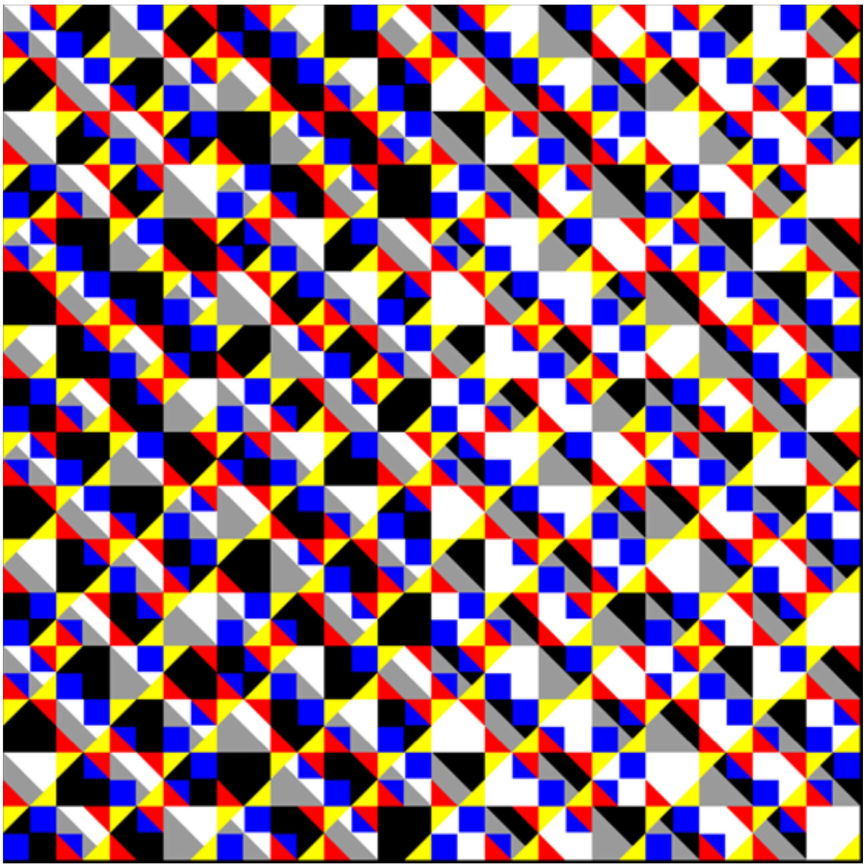
252	19	224	15	60	211	32	207	124	147	96	143	188	83	160	79
7	232	27	244	199	40	219	52	135	104	155	116	71	168	91	180
200	39	212	59	8	231	20	251	72	167	84	187	136	103	148	123
51	220	47	192	243	28	239	0	179	92	175	64	115	156	111	128
255	16	227	12	63	208	35	204	127	144	99	140	191	80	163	76
4	235	24	247	196	43	216	55	132	107	152	119	68	171	88	183
203	36	215	56	11	228	23	248	75	164	87	184	139	100	151	120
48	223	44	195	240	31	236	3	176	95	172	67	112	159	108	131
254	17	226	13	62	209	34	205	126	145	98	141	190	81	162	77
5	234	25	246	197	42	217	54	133	106	153	118	69	170	89	182
202	37	214	57	10	229	22	249	74	165	86	185	138	101	150	121
49	222	45	194	241	30	237	2	177	94	173	66	113	158	109	130
253	18	225	14	61	210	33	206	125	146	97	142	189	82	161	78
6	233	26	245	198	41	218	53	134	105	154	117	70	169	90	181
201	38	213	58	9	230	21	250	73	166	85	186	137	102	149	122
50	221	46	193	242	29	238	1	178	93	174	65	114	157	110	129

Magisch vierkant bij BMS (2008)

- Je zou nu een analyse van Binary Magic Square 2008 kunnen maken. Je zou jezelf allerlei vragen kunnen gaan stellen:
  - Hoe worden de vakjes verdeeld in de verschillende driehoekjes?
  - Welke kleuren worden er gebruikt?
  - Hoe wordt de invulling van elk driehoekje bepaald?
  - Wat valt je op?
  - Wat vind je van dit kunstwerk?

Dat ga ik zeker nog een keer doen…☺

Binary Magic Square



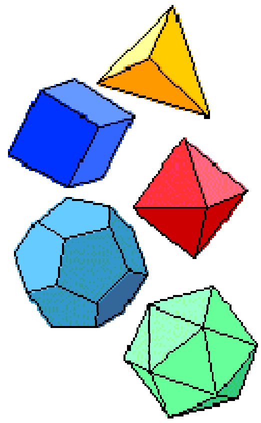
Gerard Traarbach, Quaternary Magic Square (2008)

Werkblad – regelmatige en halfregelmatige veelvlakken

Wiskunde en cultuur 2-3

Februari 2008

Opdracht 1



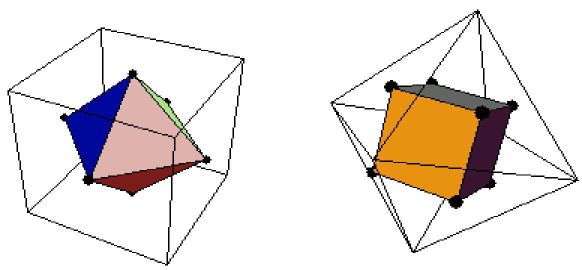
Hiernaast zie je een plaatje met de vijf **Platonische lichamen**. Ze worden ook wel **regelmatige veelvlakken** genoemd. In totaal zijn er vijf regelmatige veelvlakken: tetraëder, hexaëder, octaëder, dodecaëder en icosaëder.

Al in de Griekse oudheid was er grote fascinatie voor symmetrie, niet alleen van vlakke figuren, zoals driehoeken, maar ook van ruimtelijke figuren. Pythagoras was de eerste die verschillende regelmatige veelvlakken kon construeren. Een veelvlak is een ruimtelijke figuur die begrensd wordt door regelmatige veelhoeken (driehoeken, vierhoeken, enz.). Regelmatige veelvlakken hebben mooie eigenschappen die samenhangen met symmetrie.

a. Voor het aantal ribben R, het aantal grensvlakken G en aantal hoekpunten H van elk convex lichaam geldt **de formule van Euler**: R+2=G+H. Ga na dat deze formule ook geldt voor de Platonische lichamen. Gebruik daarbij onderstaand schema:

		T	H	O	D	I
Aantal grensvlakken	G					
Aantal hoekpunten	H					
Aantal ribben	R					
Orde van de zijde	P					
Orde van het hoekpunt	Q					

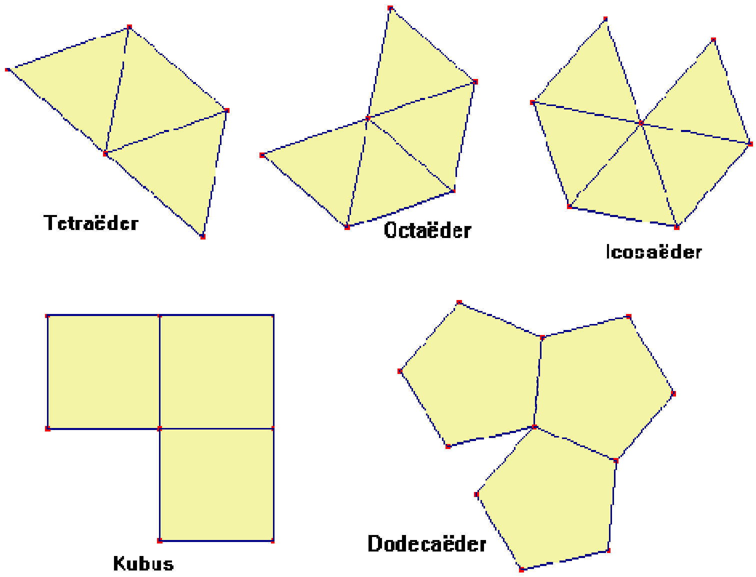
In het schema staat ook de **order van de zijde P** (aantal zijden van de gebruikte veelhoeken) en de **orde van het hoekpunt Q** (aantal vlakken dat samenkomt in een hoekpunt). Vul dat ook in voor de vijf Platonische lichamen. In het algemeen geldt dat als **{P,Q}** een lichaam is dan is **{Q,P}** dat ook. Hieronder zie je daar twee voorbeelden van:



Als je een kubus tekent {4,3} en je verbindt alle 'middelpunten' van de 6 zijden met elkaar, dan krijg je een octaëder {3,4} en andersom! Toeval?

b. Om na te gaan hoe dat zit bij de andere platonisch lichamen kan je proberen de **duale** van de dodecaëder te tekenen (zie bijlage). Wat valt je op?
Wat zal dan de duale zijn van de icosaëder?
En van de tetraëder?
Had je dit kunnen voorspellen op grond van de orde van de zijde en de orde van het hoekpunt?

Je kunt je afvragen waarom er ‘slechts’ vijf Platonische lichamen zijn. De zijvlakken van een platonisch lichaam bestaat uit een aantal regelmatige en congruente veelhoeken, waarbij elk hoekpunt hetzelfde aantal zijvlakken samenkomen. Dat betekent dat we alleen naar één hoekpunt kunnen kijken om te weten hoe het zit bij alle hoekpunten. Bij een hoekpunt komen in ieder geval altijd minimaal drie zijvlakken bij elkaar.



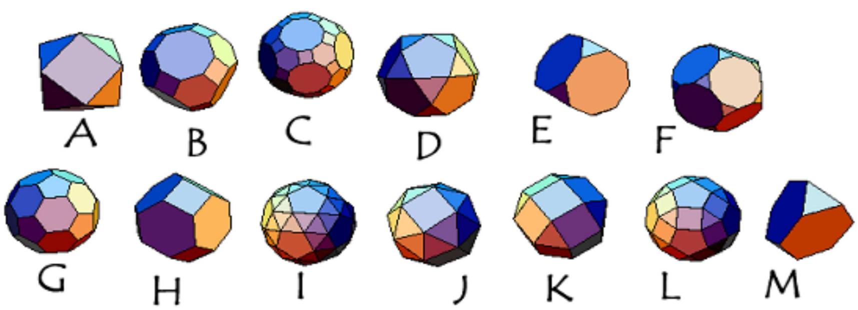
c. Toon aan dat er niet meer dan 5 regelmatige veelvlakken kunnen bestaan.

De namen als tetraëder, octaëder, e.d. komen uit het Grieks. Zo betekent het 'voorvoegsel icosa’ 20. 'eder' komt van 'edr' wat weer komt van het Griekse woord 'hedra' dat **zitplaats** betekent. Kortom: icosaëder is eigenlijk gewoon Grieks voor twintigvlak.

Opdracht 2

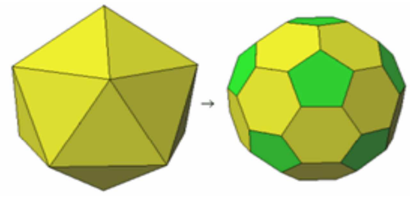
Bij de regelmatige veelvlakken (Platonische lichamen) zijn de zijvlakken onderling allemaal hetzelfde (dus allemaal driehoeken of allemaal vierkanten etc.) Bij de **halfregelmatige veelvlakken** of **Archimedische lichamen** zijn de zijvlakken óók regelmatig, maar niet onderling allemaal van dezelfde soort. Behalve driehoeken kunnen er bijvoorbeeld ook vierkanten voorkomen.

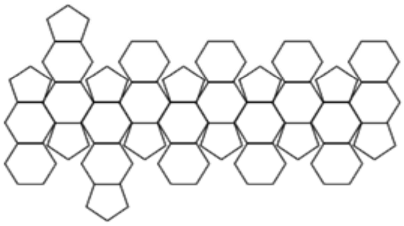
- Het veelvlak is opgebouwd uit tenminste twee soorten regelmatige veelhoeken.
- In elk hoekpunt komt dezelfde groepering van veelhoeken voor, d.w.z. het veelvlak is **uniform**.
- Het is geen prisma of antiprisma.



Opvallend is dat 7 van de 13 halfregelmatige veelvlakken gemaakt kunnen worden door van een regelmatig veelvlak de hoekpunten af te snijden. Het afsnijden van hoekpunten, noemen we ook **afknotten**. Blijkbaar is het mogelijk om door afknotting van een regelmatig veelvlak een halfregelmatig veelvlak te krijgen. Althans in 7 van de 13 gevallen.

Een voorbeeld





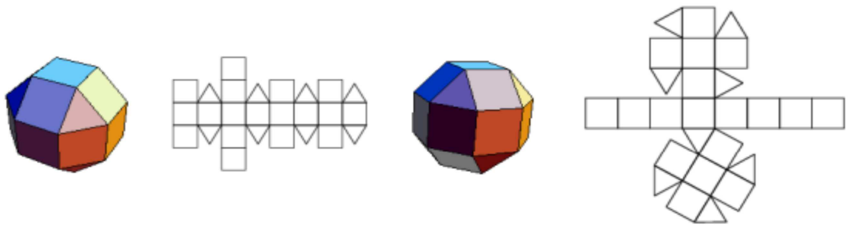
a. Geef van de 13 halfregelmatige veelvlakken A t/m M aan of ze kunnen worden verkregen door afknotting van een regelmatig veelvlak. Geef ook aan welk regelmatig veelvlak dat dan is.

Hieronder zie je de **namen** (en nog wat meer informatie) van de 13 halfregelmatige veelvlakken.

Naam	Vlakken	
Kuboctaëder	14	8 gelijkzijdige driehoeken, 6 vierkanten
Icosidodecaëder	32	20 gelijkzijdige driehoeken, 12 vijfhoeken
Afgeknotte tetraëder	8	4 driehoeken, 4 zeshoeken
Afgeknotte kubus	14	8 driehoeken, 6 achthoeken
Afgeknotte octaëder	14	6 vierkanten, 8 zeshoeken
Afgeknotte dodecaëder	32	20 driehoeken, 12 tienhoeken
Afgeknotte icosaëder	32	12 vijfhoeken, 20 zeshoeken
Romboëdrisch kuboctaëder	26	8 driehoeken, 18 vierkanten
Afgeknotte kuboctaëder	26	12 vierkanten, 8 zeshoeken, 6 achthoeken
Romboëdrisch icosidodecaëder	62	20 driehoeken, 30 vierkanten, 12 vijfhoeken
Afgeknotte icosidodecaëder	62	30 vierkanten, 20 zeshoeken, 12 tienhoeken
Stompe hexaeder	38	32 driehoeken, 6 vierkanten
Stompe dodecaëder	92	80 driehoeken, 12 vijfhoeken

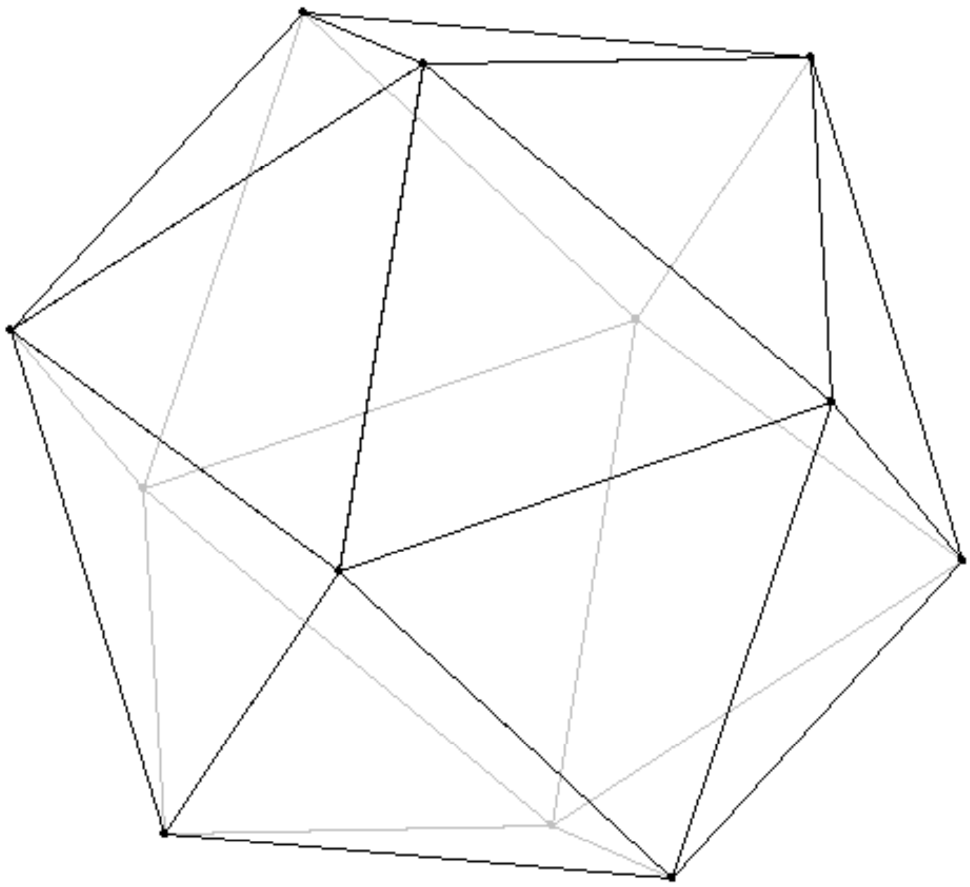
b. Zet de letters A t/m M bij het juiste veelvlak.

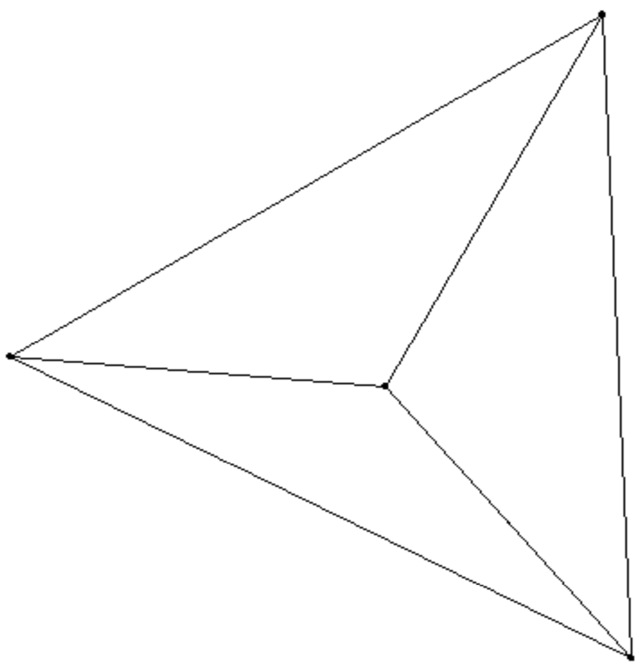
Hiernaast zie je het zogenaamde Miller-veelvlak. Dat is **geen** halfregelmatig veelvlak. Toch lijkt het wel erg veel op **K** hierboven… maar ’t is ‘m niet! Je kan dat goed zien als je de uitslagen vergelijkt:



c. Waarom is het Miller-veelvlak **geen** halfregelmatig veelvlak?

Bijlage werkblad 1 wiskunde en cultuur 2-3





Werkblad - oppervlakten

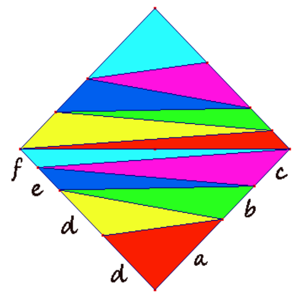
Wiskunde en cultuur 2-3

Februari 2008

Opdracht 1

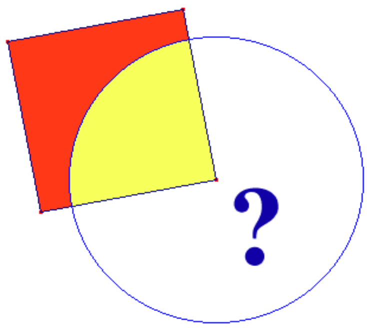
In het kunstwerk van Max Bill, ‘Einheit aus flächengleichen Farben (1972) hiernaast zijn de zijden verdeeld in 3 en 2 stukken. De driehoeken hebben allemaal dezelfde oppervlakte.

- Neem voor de lengte van een zijde van het vierkant 8 en bereken exact de verdelingen.
- Doe hetzelfde maar verdeel het vierkant nu in één zijde in drieën en één zijde in vieren. Neem voor de lengte van een zijde van het vierkant 240 en bereken exact de verdeling.



Opdracht 2

Hieronder zie je een vierkant met een cirkel met het middelpunt in een van de hoekpunten die het vierkant verdeeld in twee delen met gelijke oppervlakte.



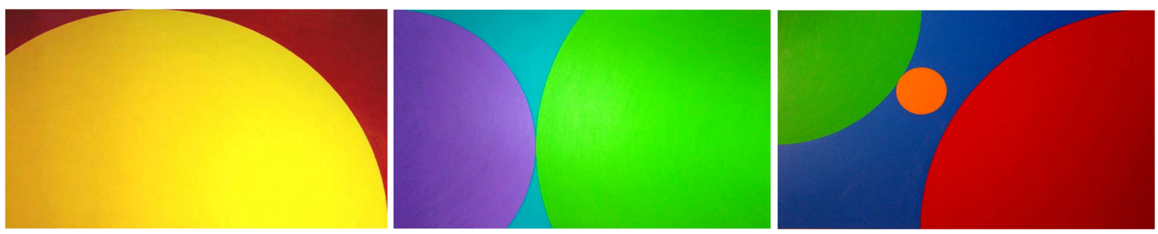
- Neem voor de zijde 10 en bereken de straal van cirkel.

Opdracht 3

Teken een rechthoek en verdeel deze rechthoek in vijf driehoeken met dezelfde oppervlakte. Construeren dus!

Opdracht 4

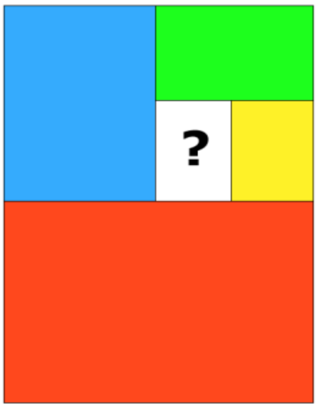
Hieronder zie je drie kunstwerken van Hans Baggen.



- Wat zou hier aan de hand zijn? Geef steekhoudende argumenten!

Opdracht 5

Hiernaast zie je een rechthoek met daarin weer nieuwe (kleinere) rechthoeken. De rechthoeken (m.u.v. de rechthoek met het vraagteken) zijn gelijkvormig en wel zo dat de oppervlakte steeds de helft is.

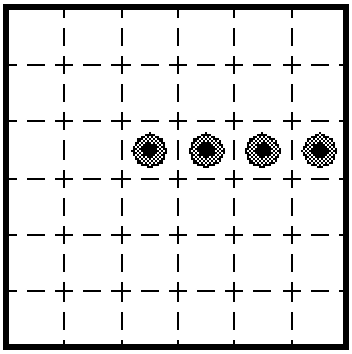


a. Wat is de verhouding van de lengte en de breedte van de rechthoeken?
b. Neem de tekening over en maak de tekening af.
c. Wat komt er uit deze ‘som’: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$?

… en wat heeft dat met de rechthoeken hiernaast te maken?

Opdracht 6

Je ziet hier een vierkant stuk land met 4 bomen.



Kun je het land in vier gelijke stukken met dezelfde vorm verdelen en wel zo dat er in elk stuk een boom staat ?

Opdracht 7

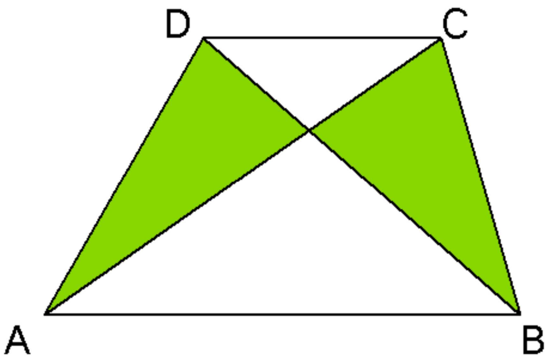


fig. 1 Baertling (1960)

De vierhoek ABCD is een trapezium (AB // DC).

- Beredeneer dat de gekleurde oppervlakten gelijk van grootte zijn.

Opdracht 8

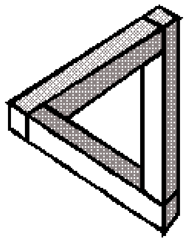
Zit er ook regelmaat in het schilderij van Baertling (1960) in figuur 1?

Werkblad - onmogelijke figuren en vlakvullingen

Wiskunde en cultuur 2-3

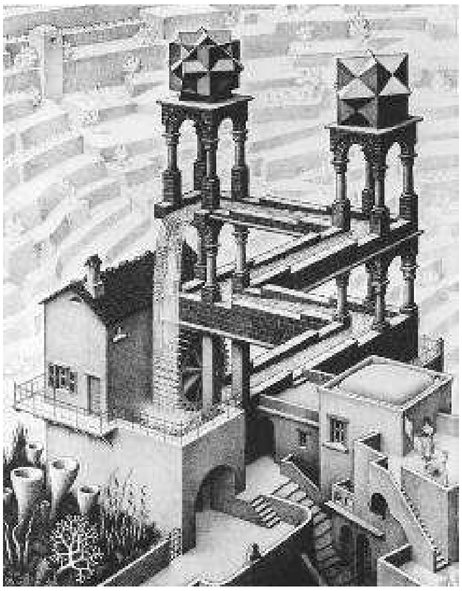
Februari 2009

Opdracht 1 – de onmogelijke driebalk

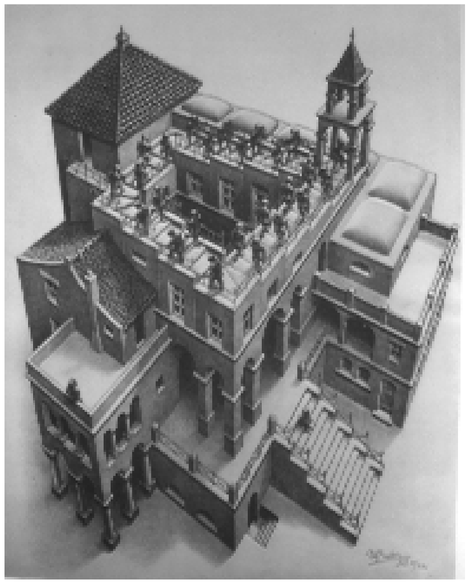


Hiernaast zie je een eenvoudige ‘onmogelijke figuur’. Het is een onmogelijke driebalk (opgebouwd uit drie balken).

- Probeer deze maar ‘s ‘los uit de hand’ na te tekenen.



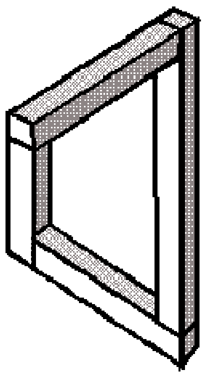
Figuur 1



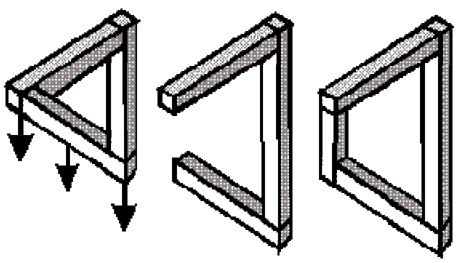
Figuur 2

- In figuur 1 staat een tekening van M.C.Escher. Je kunt in de tekening drie onmogelijke driebalken herkennen. Geef in de tekening aan waar je die kan vinden.

Opdracht 2



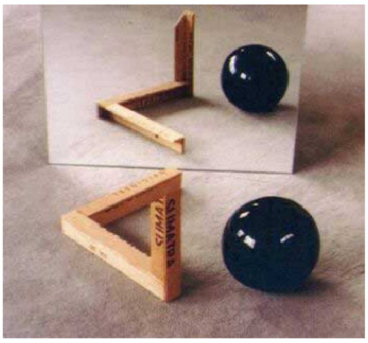
Hiernaast zie je een vierbalk. In de tekening hieronder kun je zien dat je van een onmogelijke driebalk een onmogelijke vierbalk kunt maken door de driebalk als het ware uit te schuiven:



In figuur 2 kan je de vierbalk terug vinden.

- Teken zelf ‘los uit de hand’ een vierbalk.

Opdracht 3



In de foto hiernaast kan je zien dat zo’n onmogelijk figuur helemaal niet onmogelijk is. Het probleem is meer dat je vanuit je ‘standpunt’ (dat komt vrij precies) iets anders ziet dan wat er is!

- Teken een vierbalk met spiegelbeeld zoals in de foto hiernaast.

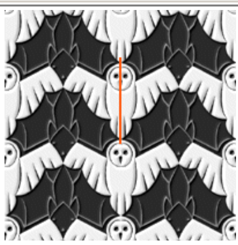
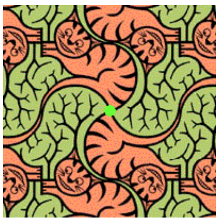
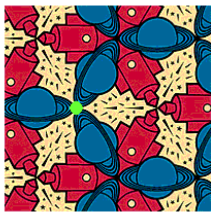
Opdracht 4

In de foto hiernaast ligt op de vloer een raamwerkje van vier vierkantjes. Het is zo gedaan dat het vanuit het standpunt van de camera net lijkt alsof het een vierkant is. Dat is niet zo.

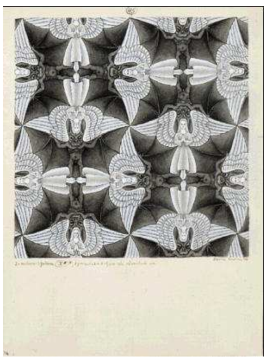
- Geef een schatting van de werkelijke afmetingen van de vierhoek op de vloer.
- Als je oog op 2 m hoogte zit en je staat 3 meter van de onderkant van de vierhoek op de vloer wat moeten dan de afmetingen zijn zodat het precies een vierkant lijkt?

Opdracht 5

Hier onder zie je enkele vlakvullingen met daarbij steeds het soort symmetrie in de tekening.

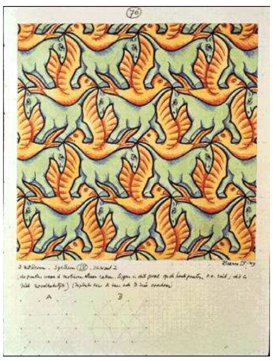
Lijnsymmetrie	**Puntsymmetrie**	**Draaisymmetrie**
		
De rode lijn geeft aan dat de figuren lijnsymmetrisch zijn.	De katten zijn puntsymmetrisch t.o.v. de groene punt.	De groen punt is het centrum van draaiing over 120°. Er zijn natuurlijk nog veel meer punten te vinden.

M.C.Escher heeft zich naast de ‘onmogelijke tekeningen’ ook beziggehouden met vlakvullingen. Hieronder kan je daar een aantal van vinden:



1.

2.



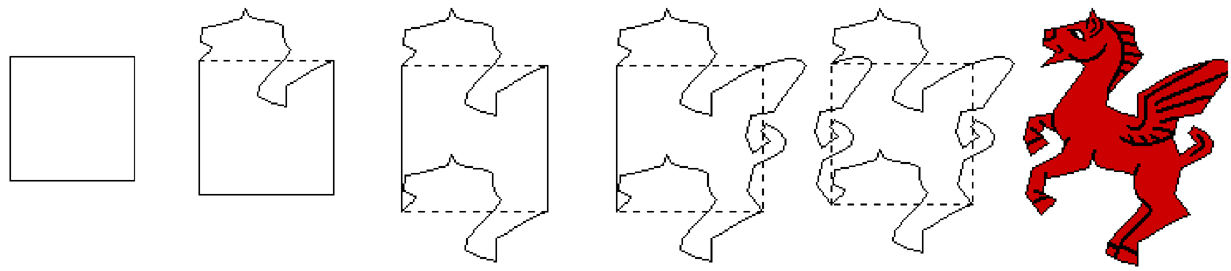
3.

4.

- Welke soorten symmetrie kan je in tekeningen 1 t/m 4 ontdekken?

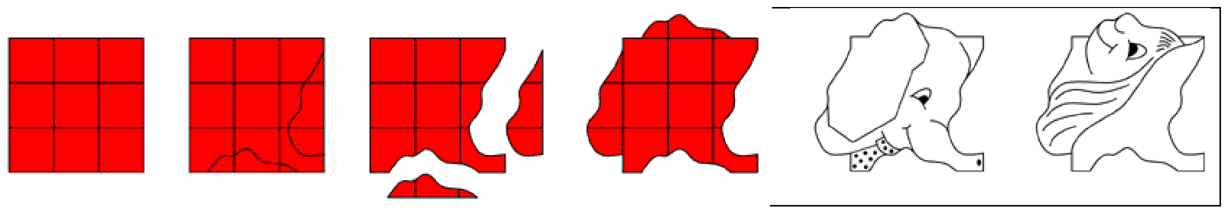
Zelf een vlakvulling maken

Hieronder zie je hoe je zelf een vlakvulling kunt maken.

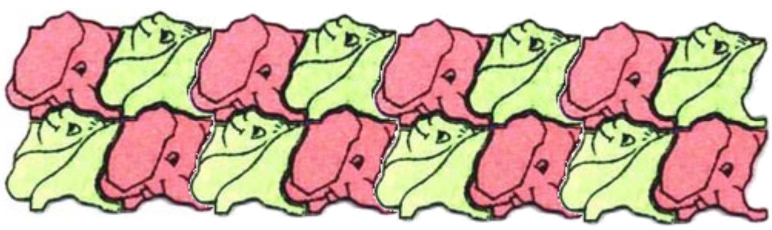


Een uitstulping aan de bovenkant wordt gecompenseerd met een instulping aan de onderkant. Hetzelfde gebeurt ook met de linker en de rechter kant.

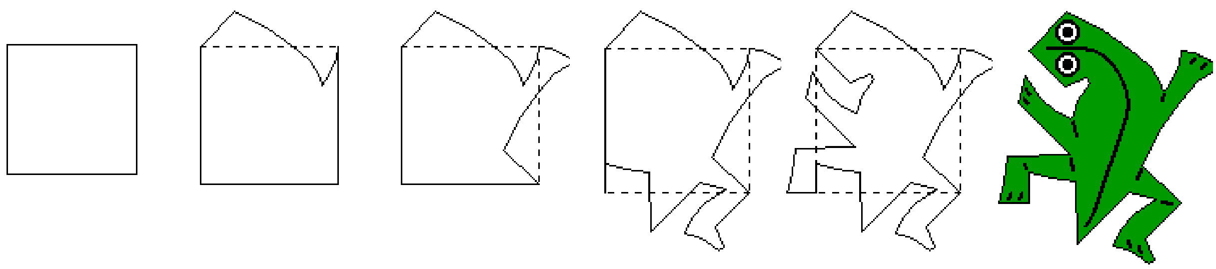
Om nu zelf zo iets te maken neem je een stevig stuk papier of karton. Knip hieruit een vierkant van 6 cm bij 6 cm. Verdeel het vierkant in 9 kleinere vierkantjes van 2 cm bij 2 cm. Knip uit de rechterkant een stuk en plak dit aan de linkerkant. Doe dit ook bij de onder- en bovenkant. Zorg ervoor dat je de hoekpunten niet afknipt. Je hebt op deze manier een mal (=voorbeeld model) gemaakt voor een vlakverdeling.



Bekijk de vorm van het figuur. Zoek er iets herkenbaars in. In dit voorbeeld kun je er een olifant of een elfje in zien.



Hieronder zie je nog een voorbeeld:



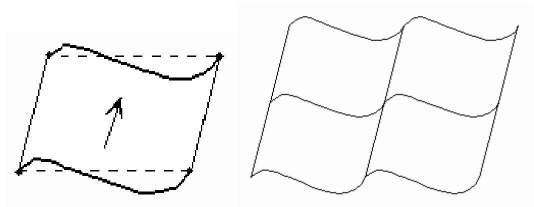
Opdracht 6

- Maak je eigen vlakvulling.

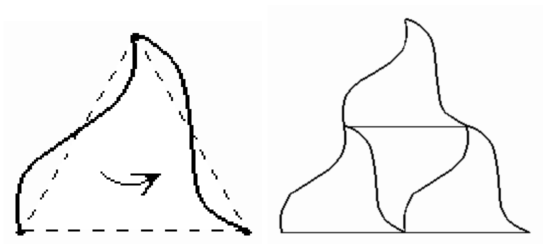
Een rooster van veelhoeken vervormen

Een vlakvulling kun je ook maken door een rooster van veelhoeken te vervormen. Je verandert dan de zijden van een veelhoek op zo’n manier dat je met die veranderde veelhoek weer het hele vlak kunt opvullen. Zo’n veranderde veelhoek noemen we een tegel. Door de tegel te herhalen krijg je een vlakvulling.

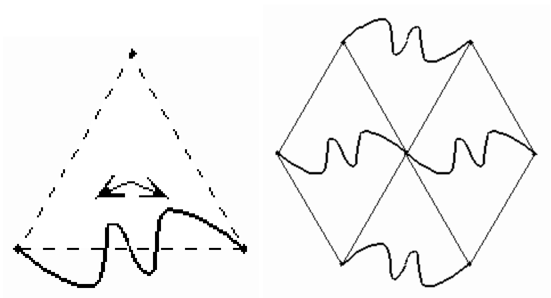
Je kunt daarbij uitgaan van verschillende veelhoeken. Met een driehoek kun je een heel vlak vullen.



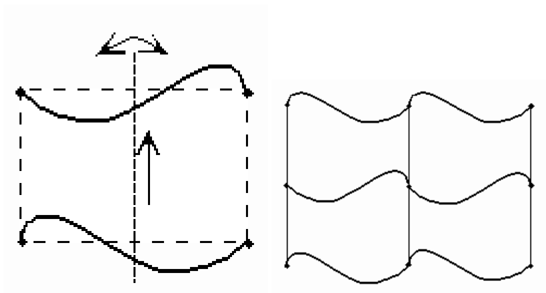
Translatie



Rotatie om een hoekpunt



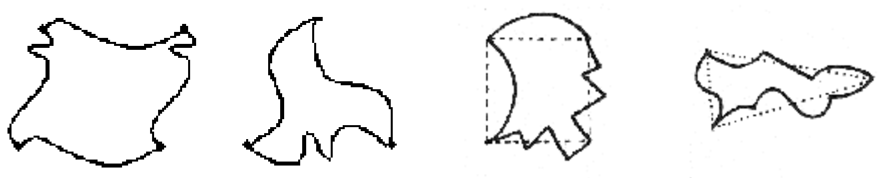
Rotatie om het midden van zijden



Glij-spiegeling

Opdracht 7

Ga van onderstaande tegels na welke transformaties gebruikt zijn:



EINDE